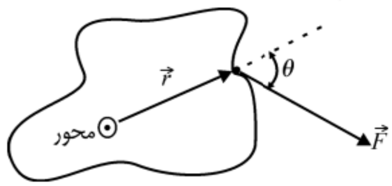
فصل ۹
دینامیک دوران

۹-۱- گشتاور

باید نیرویی وجود داشته باشد تا حرکتی ایجاد شود. ولی چنانچه این نیرو بر محور دوران اعمال گردد، نمی‌تواند باعث دوران شود. همچنین اگر نیرو در امتداد شعاع دوران اعمال گردد، چرخش ایجاد نمی‌شود. بنابراین برای ایجاد دوران در یک جسم صلب نیاز به کمیت جدیدی است که آن را گشتاور می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.



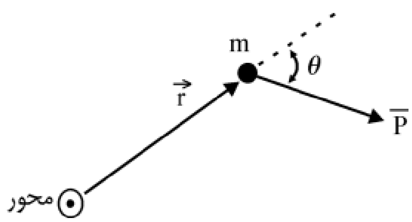
شکل ۹-۱

$$\tau = rF\sin\theta \qquad \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i$$

۹-۲- تکانه زاویه‌ای $(\vec{L})$

ذره‌ای به جرم m با تکانه $\vec{P}$ که در فاصلهٔ $\vec{r}$ از محور دوران است را در نظر گرفته، در این صورت تکانه زاویه‌ای ذره $(\vec{L})$ نسبت به محور به‌صورت زیر تعریف می‌شود.



شکل ۹-۲

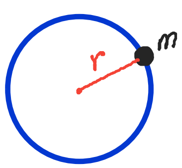
$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{P} + \vec{r}\times\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}\times\vec{P} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{و} \quad \vec{v}\times m\vec{v} = m(\vec{v}\times\vec{v}) = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

۹-۳- لختی دورانی

در بیان دینامیک دوران با کمیتی مواجه می‌شویم که معیاری از مقاومت جسم در برابر تغییرات حرکت دورانی (شتاب زاویه‌ای) است. به این کمیت لختی دورانی یا گشتاور لختی یا اینرسی دورانی گفته و معمولاً با (I) نشان داده می‌شود.



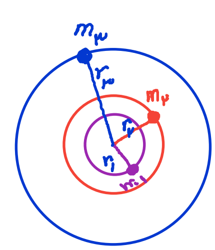
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=r\omega} K = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \longrightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I = mr^2$$

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 \qquad v_1 = r_1\omega\,,\ v_2 = r_2\omega\,,\ \ldots\,,\ v_n = r_n\omega$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

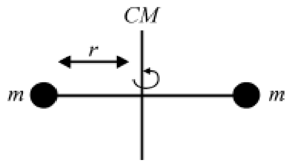
$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2 \Rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$



۹-۴- محاسبه لختی دورانی

مثال (۹-۱). دو گلوله کوچک هر یک به جرم ۴۰۰ gr دو طرف میلهٔ سبکی به طول ۰/۵ متر متصل شده‌اند. لختی دورانی این ترکیب را نسبت به محوری که (الف) بر میله عمود و از مرکز جرم می‌گذرد. (ب) بر میله عمود و از یکی از گلوله‌ها می‌گذرد، حساب کنید.

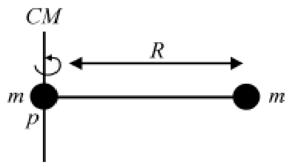
حل:



الف)

$$I_{cm} = \sum m_i r_i^۲ = m r^۲ + m r^۲ = ۲ m r^۲$$

$$= ۲(۰/۴)(۰/۲۵)^۲ = ۰/۰۵ \ \mathrm{kg\,m^۲}$$



ب)

$$I_P = \sum m_i r_i^۲ = m(۰)^۲ + m(R)^۲ = mR^۲$$

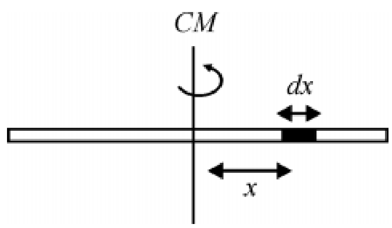
$$= ۰/۴(۰/۵)^۲ = ۰/۱ \ \mathrm{kg\,m^۲}$$

برای حالتی که جسم دارای توزیع پیوسته است می‌توان با المان‌گیری (dm) آن را به اجزاء نقطه‌ای تبدیل و I را محاسبه کرد. دراین حالت باید از انتگرال به جای جمع استفاده شود.

$$I = \int r^۲ dm$$

مثال (۹-۲). لختی دورانی میله‌ای همگن به‌طول L و جرم m را نسبت به محوری که بر میله عمود و از وسط آن می‌گذرد، حساب کنید.

حل: با توجه به شکل:

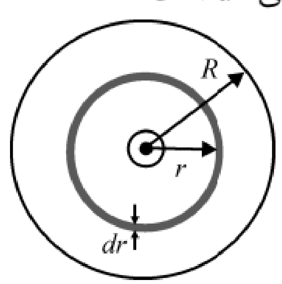


$$I_{cm} = \int r^۲ dm = \int_{-L/۲}^{L/۲} x^۲ \lambda\, dx = \lambda \left(\frac{x^۳}{۳}\right)_{-L/۲}^{L/۲}$$

$$\lambda = \frac{m}{L} \Rightarrow I_{cm} = \frac{m}{L}\left(\frac{۱}{۳}\left(\frac{L^۳}{۸}\right) - \frac{۱}{۳}\left(-\frac{L^۳}{۸}\right)\right) = \frac{۱}{۱۲} m L^۲$$

مثال (۹-۴). لختی دورانی صفحه‌ای همگن و دایره‌ای (قرص) به شعاع R و جرم m را نسبت به محور قرص محاسبه کنید.

حل: المان یک حلقه به شعاع r و پهنای dr است.



$$I_{cm} = \int r^۲ dm = \int r^۲ \sigma\, ds = \int r^۲ \sigma ۲\pi r\, dr = ۲\pi\sigma \int_۰^R r^۳ dr = ۲\pi\sigma \left(\frac{r^۴}{۴}\right)_۰^R = \frac{\pi\sigma R^۴}{۲}$$

$$\sigma = \frac{m}{s} = \frac{m}{\pi R^۲} \Rightarrow I_{cm} = \frac{۱}{۲} m R^۲$$

۹-۵- انتقال محور دوران

۹-۵-۱- قضیه محورهای موازی

اگر لختی دورانی جسم نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد، I_{cm} باشد و بخواهیم لختی دورانی جسم را نسبت به محوری که از نقطه P می‌گذرد و با محور مرکز جرم موازی است، به‌دست آوریم. در صورتی که جرم جسم m و فاصلهٔ دو محور از یکدیگر h باشد، خواهیم داشت:

$$I_P = I_{cm} + mh^۲$$

۹-۵-۲- قضیه محورهای عمود بر هم (محورهای متعامد) این قضیه برای شکل‌های دو بعدی صادق است

اگر سه محور عمود بر هم (مانند محورهای x و y و z) به‌گونه‌ای اختیار شوند که دو محور آن (مانند x و y) در صفحه شکل قرار گیرند و محور سوم (مانند z) بر صفحهٔ شکل عمود باشد، در این‌صورت لختی دورانی جسم نسبت به محور عمودی با مجموع لختی‌های دورانی نسبت به دو محور دیگر که در صفحهٔ شکل قرار دارند برابر است یعنی:

$$I_z = I_x + I_y$$

۹-۶- دینامیک دوران

انتقال	$\vec{F}$	$\vec{P}$	m	$K=\frac{۱}{۲}mv^۲$	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	$w=\int_{r_۰}^{r_۱}\vec{F}\cdot\vec{dl}$	$\sum\vec{F}=m\vec{a}$	...
دوران	$\vec{\tau}$	$\vec{L}$	I	$K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲$	$P=\vec{\tau}.\vec{\omega}$	$w=\int_{\theta_۰}^{\theta_۱}\tau\, d\theta$	$\sum\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$	...

مثال (۹-۱۴). تکانه زاویه‌ای چرخ لنگری که لختی دورانی آن $۰/۱۲۵\ kg/m^۲$ است، در مدت ۱/۵s از $۳/۰\ kg\,m^۲/s$ به $۲/۰\ kg\,m^۲/s$ کاهش می‌یابد.

الف) گشتاور نیروی متوسط وارد بر چرخ در این مدت چقدر است؟

ب) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه‌ای، چرخ در این مدت چند دور می‌زند؟

ج) کار انجام شده در این مدت چقدر است؟

حل:

الف)

$$L = ۲\ kg\,m^۲/s \qquad \Delta t = ۱/۵ s$$

$$L_۰ = ۳\ kg\,m^۲/s$$

$$\bar{\tau} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{۲-۳}{۱/۵} = -\frac{۱}{۱/۵} = -۰/۶۷\ N.m$$

ب)

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = -۵/۳\ rad/s^۲$$

$$L_۰ = I\omega_۰ \Rightarrow \omega_۰ = \frac{L_۰}{I} = ۲۴\ rad/s$$

$$L = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I} = ۱۶\ rad/s$$

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{(۱۶)^۲-(۲۴)^۲}{-۱۰/۶} = ۳۰/۲\ rad = \frac{۱۵/۱}{\pi}\ rev$$

ج) از قضیه کار و انرژی:

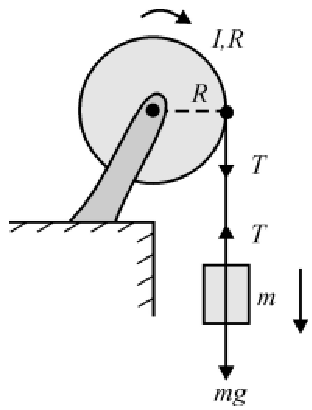
$$w = \Delta K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - \frac{۱}{۲}I\omega_۰ \Rightarrow w = \frac{۱}{۲}(۰/۱۲۵)(-۳۲۰) = -۲۰\ j$$

مثال (۹-۱۶). در شکل زیر، نخ سبکی، دور قرقره‌ای به شعاع R پیچیده شده و به انتهای آزاد نخ، جسمی به جرم m متصل است. لختی دورانی قرقره حول محور مرکزی برابر I می‌باشد. دستگاه از حالت سکون رها شده و جسم، ضمن باز شدن نخ، سقوط می‌کند. شتاب حرکت جسم و شتاب زاویه‌ای قرقره و کشش نخ را محاسبه کنید.

حل: برای انتقال، سمت حرکت را مثبت و برای دوران، سمت چرخش را مثبت می‌گیریم.

m انتقال : $\sum F = ma \Rightarrow mg - T = ma$

دوران قرقره: $\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = I\alpha$



از طرفی شتاب حرکت جسم باشتاب نخ یکی است و چون نخ دور قرقره پیچیده شده، پس شتاب نخ با شتاب مماسی قرقره یکسان است $(a = a_T)$، بنابراین:

$$a = a_T = R\alpha$$

با حل دستگاه معادلات فوق، نتایج زیر حاصل خواهد شد.

$$mg = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{mg}{mR + \frac{I}{R}}$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = I\left(\frac{mg}{mR^2 + I}\right)$$

مثال (۹-۱۹). یک کرهٔ توپر یکنواخت، روی یاتاقان‌های بدون اصطکاکی، حول محور قائمی که از مرکز آن گذشته است، می‌چرخد. ریسمان سبکی دور استوای کره پیچیده شده و پس از گذشتن از روی قرقره‌ای، به جسمی متصل شده است. جسم رها می‌شود تا ضمن باز شدن نخ از دور کره، سقوط کند.

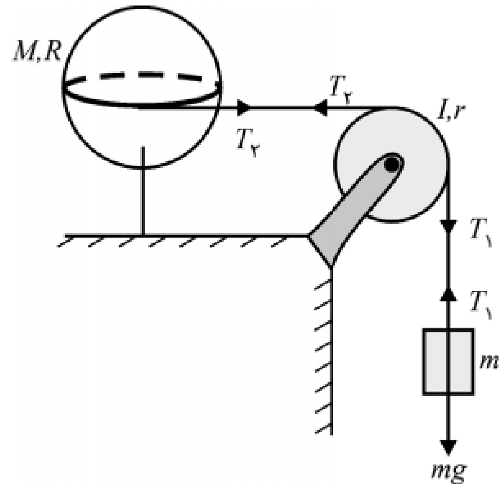
الف) شتاب حرکت جسم را محاسبه کنید.

ب) سرعت جسم را هنگامی که به اندازه h سقوط می‌کند، به‌دست آورید؟

ج) با استفاده از روابط مربوط به انرژی، سرعت جسم را پس از سقوط به اندازه h به‌دست آورید؟

حل:

الف) جسم دارای حرکت انتقالی و قرقره و کره دارای حرکت دورانی خواهند بود.با استفاده از روابط دینامیک انتقال و دوران به معادلات زیر خواهیم رسید:



انتقال جرم m

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - T_1 = ma$$

دوران قرقره $\quad \sum \tau = I\alpha \Rightarrow T_1 r - T_2 r = I\alpha$ و $a = r\alpha$

دوران کره $\quad T_2 R = I_1 \alpha_1$ و $a = R\alpha_1$ و $I_1 = \frac{2}{5}MR^2$

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ T_1 - T_2 = I\dfrac{a}{r^2} \\ T_2 = \dfrac{2}{5}Ma \end{cases} \Rightarrow mg = \left(m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{5}M\right)a \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{5}M}$$

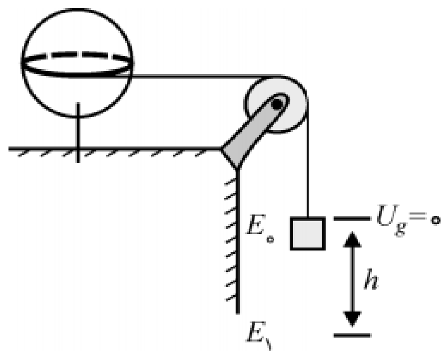
ب) با توجه به ثابت بودن شتاب که در قسمت (الف) محاسبه شد، از معادله مستقل از زمان استفاده می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = 2\left(\frac{mg}{m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{5}M}\right)h \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{5}M}}$$

ج) درمواقعی که شتاب ثابت نیست یا نمی‌خواهیم از روش دینامیکی، مسئله را حل کنیم، مـی‌تـوان از روش پایستگی انرژی استفاده نمود. در این حالت:

ابتدا که جسم ساکن است:

$$E_{\circ} = K_{\circ} + U_{\circ} = \circ$$



موقعی که جسم به اندازه h پایین رفته:

$$E_{۱} = K_{۱} + U_{۱} = \frac{۱}{۲}mv^{۲} + \frac{۱}{۲}I\omega^{۲} + \frac{۱}{۲}I_{۱}\omega_{۱}^{۲} - mgh$$

با توجه به رابطه پایستگی انرژی:

$$\Delta E = w_{nC} = \circ \Rightarrow E_{۱} = E_{\circ}$$

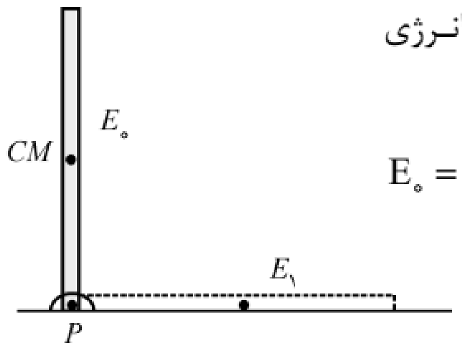
$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} + \frac{۱}{۲}I\omega^{۲} + \frac{۱}{۲}I_{۱}\omega_{۱}^{۲} - mgh = \circ$$

از طرفی سرعت جسم با سرعت خطی نقطه مماس بر قرقره و مماس بر کره برابر است.

$$v = r\omega = R\,\omega_{۱} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \qquad \text{و} \qquad \omega_{۱} = \frac{v}{R} \qquad \text{و} \qquad I_{۱} = \frac{۲}{۵}MR^{۲}$$

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} + \frac{۱}{۲}I\left(\frac{v}{r}\right)^{۲} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۵}MR^{۲}\right)\left(\frac{v}{R}\right)^{۲} - mg\,h = \circ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲mg\,h}{m + \frac{I}{r^{۲}} + \frac{۲}{۵}M}}$$

☜ **مثال (۹-۲۰).** میله‌ای به‌طول ۱ m از یک سر به زمین لولا شده و در حالت قائم قـرار دارد. اگـر این میله رها شده و روی زمین بیفتد، سرعت سر آزاد میله در لحظـه برخـورد بـه زمـین چقـدر است؟



حل: با استفاده از پایستگی انرژی؛ (سطح زمین را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی اختیار می‌کنیم)

$$E_0 = K_0 + U_0 = mg\frac{L}{2}$$ (جرم در مرکز جرم فرض می‌شود)

میله حول محور P فقط دوران می‌کند.

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

$$\Delta E = w_{nC} = 0 \Rightarrow E_0 = E_1 \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$ ($I_P = \frac{1}{3}mL^2$ چرا؟)

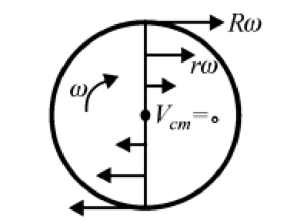
$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

از طرفی برای یک جسم در حال دوران، سرعت خطی یک نقطه از جسم با سرعت زاویه‌ای رابطه دارد.

$$v = r\omega$$

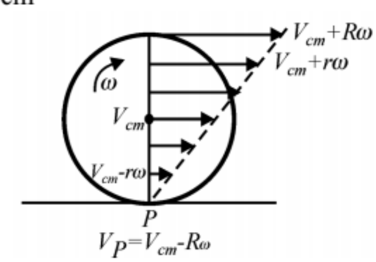
$$r = L \Rightarrow v = L\omega = L\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL} = \sqrt{3(9/8)} \cong 5/4 \text{ m/s}$$

۹-۷- ترکیب دوران و انتقال (غلتش)



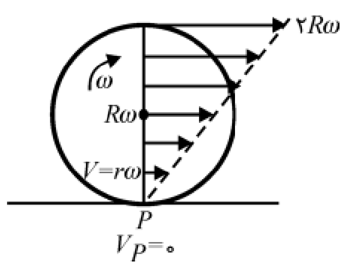
(الف) *جسم فقط دوران می‌کند.*

$$v_P = v_{cm} - r\omega$$



(ب) *جسم روی سطح می‌غلتد.*

(دوران حول مرکز جرم + انتقال مرکز جرم)



(ج) *جسم روی سطح می‌غلتد (دوران حول محور P)*

$$v_P = 0 \Rightarrow v_{cm} = R\omega$$

مثال (۹-۲۱). نشان دهید انرژی جنبشی جسم در حالت (ب) و حالت (ج) به یک نتیجه منجر می‌شوند.

حل: انرژی جنبشی جسم در حالت (ج) فقط انرژی جنبشی دورانی است بنابراین طبق قضیه محورهای موازی $I_P = I_{cm} + mR^2$:

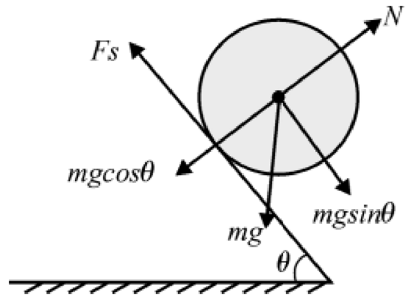
$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

از طرفی $R\omega = V_{cm}$:

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}m v_{cm}^2$$

در جواب فوق، عبارت $\frac{1}{2}mv_{cm}^2$ سهم انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم و $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ سهم انرژی جنبشی دورانی جسم حول محور مرکز جرم است. پس از عبارت مربوط به حالت (ج) به عبارت مربوط به حالت (ب) می‌رسیم و برعکس.

مثال (۹-۲۲). کرهٔ توپری به جرم m و شعاع R از بالای سطح شیب‌داری به شیب θ شروع به غلتیدن به سمت پایین می‌کند. اگر کره روی سطح نلغزد، شتاب مرکز جرم آن را حساب کنید.



حل: این مثال را از ۲ روش بررسی می‌کنیم.

الف) نسبت به مرکز جرم (ترکیب دوران و انتقال)، با توجه به نمودار آزاد رسم شده.

$$\sum F = ma \Rightarrow mg\sin\theta - f_s = ma$$

(آنچه که مانع لغزش جسم می‌شود، اصطکاک ایستایی است)

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha \Rightarrow f_s R = I_{cm}\alpha$$

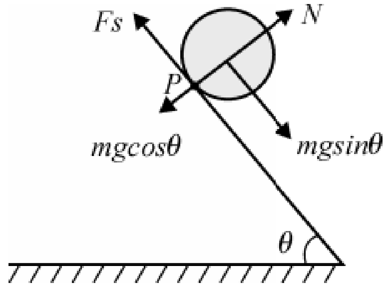
$$a_{cm} = R\alpha$$

با حل معادلات، به جواب زیر می‌رسیم:

$$mg\sin\theta = \left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)a \Rightarrow a = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I_{cm}}{R^2}}$$

$$I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow a_{cm} = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{2}{5}m} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

ب) نسبت به محور P (محل تماس کره با سطح شیبدار) (دوران محض):



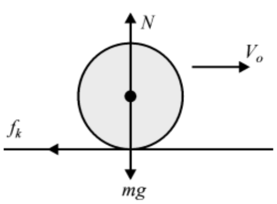
$$\sum \tau = I_P\alpha \Rightarrow mg\sin\theta R = I_P\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{mg\sin\theta R}{I_P}$$

$$a_{cm} = R\alpha = \frac{mg\sin\theta R^۲}{I_P} \qquad \text{و} \quad I_P = I_{cm} + mR^۲ = \frac{۲}{۵}mR^۲ + mR^۲ = \frac{۷}{۵}mR^۲$$

$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{۵}{۷}g\sin\theta$$

همان‌گونه که انتظار می‌رفت، هر دو روش به یک جواب منجر می‌شوند.

مثال (۹-۲۶). یک توپ بولینگ (کره توپر) با سرعت اولیه افقی $V_\circ$ و بدون چرخش روی سطح افقی پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی سطح μ_k است. (جرم توپ m و شعاع آن R می‌باشد). توپ مسافتی را روی سطح می‌لغزد و پس از آن می‌غلتد، زمان لغزش و سرعت توپ در آغاز غلتش را برحسب پارامترهای معلوم محاسبه کنید.



حل: تا موقعی که جسم می‌لغزد، بین سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای رابطه مشخصی وجود ندارد ولی هنگام غلتش $v_{cm} = R\omega$. با رسم نیروهای وارد بر جسم در هنگام لغزش دیده می‌شود که عامل چرخش توپ، اصطکاک جنبشی است.

ابتدا $v_{cm} = v_\circ$ و $\omega_\circ = \circ$. هنگام غلتش $v_{cm} = R\omega$.

$$\sum F = ma \Rightarrow \begin{cases} N - mg = \circ \\ -f_k = ma \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow f_k R = I\alpha \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه نیروها ثابت هستند، پس شتاب نیز ثابت است و از روابط بین سرعت و شتاب جایگزین می‌کنیم.

$$(۱):\ -\mu_k mg = m\left(\frac{v - v_\circ}{t}\right) \Rightarrow \mu_k g = \frac{v_\circ - v}{t}$$

برای کره توپر: $I = \frac{۲}{۵}mR^۲$

$$(۲):\ \mu_k mg R = I\left(\frac{\omega - \omega_\circ}{t}\right) \Rightarrow \mu_k g = \frac{I}{mR^۲}\left(\frac{v}{t}\right)$$

$$\Rightarrow v_\circ - v = \frac{I}{mR^۲}v \Rightarrow v = \frac{v_\circ}{۱ + \frac{I}{mR^۲}} = \frac{v_\circ}{۱ + \frac{۲}{۵}} = \frac{۵}{۷}v_\circ$$

و با قرار دادن v در معادله (۱)، زمان لغزش محاسبه می‌شود:

$$t = \frac{v_\circ - v}{\mu_k g} = \frac{۲v_\circ}{۷\mu_k g}$$

مشاهده می‌شود که هر چه ضریب اصطکاک بیشتر باشد، مدت زمان لغزش کوتاه‌تر خواهد بود.

۹-۹- تکانه زاویه‌ای و پایستگی آن

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{\tau} \qquad d\vec{L}=\vec{\tau}\,dt=\int_{L_0}^{L}d\vec{L}=\int_{t_0}^{t}\vec{\tau}\,dt=\int_{t_0}^{t}I\vec{\alpha}\,dt\Rightarrow\vec{L}-\vec{L}_0=I(\vec{\omega}-\vec{\omega}_0)$$

$$\sum\vec{\tau}_{ext}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری نمود که اگر $\sum\vec{F}_{ext}=0$ در نتیجه $\frac{d}{dt}(\vec{L})=0$ و بنابراین:

$\vec{L}=$ ثابت

مثال (۹-۳۲). شخصی روی سکوی دوار بدون اصطکاکی که با سرعت زاویه‌ای ۲ rev/s می‌چرخد، ایستاده است. این شخص دستهایش را از دو طرف کاملاً باز کرده و در هر دستش یک وزنه نگه داشته است. در این حالت، لختی دورانی کل شخص و سکو و وزنه‌ها برابر $6\,kg\cdot m^2$ است. اگر در حین دوران، شخص بازوهای خود را پایین آورده و لختی دورانی کل به $2\,kg\cdot m^2$ کاهش یابد.

الف) سرعت زاویه‌ای نهایی سکو چقدر خواهد شد؟

ب) انرژی جنبشی دورانی چقدر افزایش می‌یابد؟

حل:

الف) با توجه به اینکه مجموعه مشخص و وزنه‌ها و سکو، یک دستگاه را تشکیل می‌دهد. باز و بسته کردن دست‌ها توسط شخص، یک عامل داخلی محسوب می‌شود. پس:

$$\sum\vec{\tau}_{ext}=0\Rightarrow\vec{L}=\text{ثابت}\Rightarrow\vec{L}_i=\vec{L}_f\Rightarrow I_0\omega_0=I\omega$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{I_0}{I}\omega_0=\frac{6}{2}(2)=6\ rev/s$$

پس به همان نسبتی که لختی دورانی کاهش می‌یابد، سرعت زاویه‌ای افزایش خواهد یافت.

ب)

$$k_i=\frac{1}{2}I_0\omega_0^2$$

$$k_f=\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow\frac{k_f}{k_i}=\left(\frac{I}{I_0}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2=\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{6}{2}\right)^2=3$$

بنابراین انرژی جنبشی ۳ برابر حالت اول خواهد بود.